INSA DE TOULOUSE - DEPARTEMENT DE STPI 1ÈRE ANNEE

CONTROLE CONTINU ELECTROSTATIQUE. Durée 2 heures

Rédiger clairement. Justifier les réponses. Les exercices sont indépendants.

Données : Expression des opérateurs en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, E_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

<u>Question relative au TP – Bonus de 2 points</u>

Lorsqu'un conducteur est chargé, les charges se répartissent en surface. La densité superficielle de charge est-elle constante ou dépend-t-elle de la forme du conducteur ?

Expliquer pourquoi par un raisonnement ?

Citer et expliquer une expérience réalisée en TP permettant d'illustrer votre réponse.

<u>Exercice 1 (Charges ponctuelles sur un cube)</u> 3 points

8 charges électriques ponctuelles sont réparties aux sommets d'un cube de centre O et de côté a. Les différentes faces du cube sont perpendiculaires aux axes $(\mathrm{O}x), (\mathrm{O}y)$ et $(\mathrm{O}z)$. Les quatre charges situées dans le plan $z = +a/2$ sont identiques et négatives (valeur : $-q$). Les quatre charges situées dans le plan $z = -a/2$ sont identiques et opposées aux précédentes (valeur : $+q$). Ce système sera traité en coordonnées cartésiennes.

1°) Après avoir analysé les éventuels plans de symétrie et/ou d'antisymétrie contenant le point O, déduire l'orientation du champ électrique au point O.

2°) Calculer le champ électrique au point O. On précisera clairement son sens et son module.

<u>Exercice 2 (Charges ponctuelles sur un axe)</u> 4 points

On considère deux charges ponctuelles q_A et q_B situées sur les points A et B repérés en coordonnées cartésiennes par $\mathrm{A}(0,0,0)$ et $\mathrm{B}(0,0,d)$.

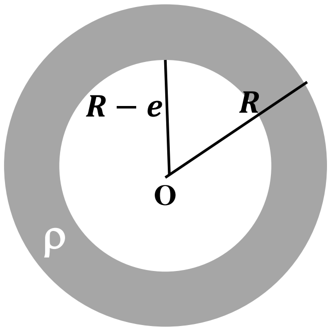
1°) Schématiser puis exprimer le champ électrique généré par ces deux charges ponctuelles au point M de coordonnées $\mathrm{M}(0,d,0)$.

2°) Donner la relation que doivent satisfaire q_A et q_B pour que ce champ soit orienté uniquement selon le vecteur $\overrightarrow{e_z}$.

Exercice 3

Partie A : Boule sphérique creuse 4 points

Une boule creuse B de centre O, de rayon extérieur R et de rayon intérieur $(R-e)$ contient une distribution volumique de charges électriques ρ uniforme et positive. Il n'y a pas de charges ailleurs dans l'espace. On note $\vec{E}$ le champ créé par cette distribution de charges et r la distance par rapport au centre de la boule.



1°) Après avoir choisi un système de coordonnées approprié et justifié clairement les propriétés du vecteur $\vec{E}$, établir par la méthode de son choix, son expression en tout point de l'espace en fonction de ρ et d'autres paramètres ou constantes. On notera :

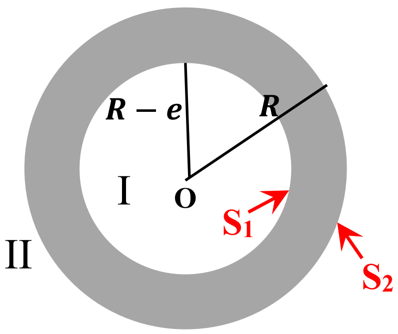
$\overrightarrow{E_{\text{int}}}$, le champ électrique dans la région définie par $r < (R-e)$
$\overrightarrow{E_{\text{B}}}$, le champ électrique dans la région définie par $(R-e) < r < R$
et $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$, le champ électrique dans la région définie par $r > R$

2°) Le champ électrique présente-t-il des discontinuités ? Si oui à quels endroits de l'espace ? Préciser, le cas échéant, la valeur de ces discontinuités.

3°) Tracer schématiquement l'évolution du module du champ électrique en fonction de r.

Partie B : Conducteur sphérique creux 4 points

Le conducteur sphérique creux représenté sur la figure ci-dessous est chargé avec une charge totale Q. Ce conducteur est isolé et à l'équilibre électrostatique. Il possède à l'évidence les mêmes symétries et invariances que la boule creuse précédente, qu'on exploitera donc sans justification supplémentaire.



1°) En manipulant les propriétés électriques des conducteurs à l'équilibre et le théorème de Gauss, déterminer la répartition des charges au sein de ce conducteur. On précisera clairement la charge portée par la surface interne S_1 et par la surface externe S_2.

2°) Déterminer par la méthode de son choix, l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E_{ext}}$ au sein de la région II ($r > R$) puis celle du champ électrique $\overrightarrow{E_{int}}$ au sein de la région I ($r < (R-e)$), en fonction de Q et d'autres paramètres ou constantes.

3°) Le champ électrique présente-t-il des discontinuités ? Si oui à quels endroits de l'espace ? Préciser, le cas échéant, la valeur de ces discontinuités.

4°) Déduire l'expression du potentiel électrostatique V_{II} dans la région II en fonction de Q et d'autres paramètres ou constantes. On considérera que ce potentiel tend vers zéro à très grande distance du centre O du conducteur creux.

5°) En utilisant une relation de continuité déterminer quel est le potentiel V du conducteur creux en fonction de Q et d'autres paramètres ou constantes.

6°) Déduire l'expression du potentiel électrostatique V_I dans la région I en fonction de Q et d'autres paramètres ou constantes.

Exercice 4 (Equations locales) 5 points

L'atome d'hydrogène H constitué d'un proton et d'un électron génère en tout point de l'espace autour de lui un potentiel électrique que l'on peut modéliser en coordonnées sphériques notées (r, θ, φ) par l'expression ci-dessous où a est une constante positive et e la charge électrique élémentaire :

$$V(r) = \frac{e}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{\exp\left(\frac{-r}{a}\right)}{r}$$

Ce modèle est appelé potentiel de Yukawa, en hommage au physicien japonais Hideki Yukawa, prix Nobel en 1949 pour ses travaux sur les forces nucléaires. Le problème sera traité en coordonnées sphériques.

1°) Quelle est l'unité de la constante a ?

2°) Exprimer le champ électrostatique en tout point de l'espace. On précisera clairement son orientation et son module.

3°) En utilisant le théorème de Gauss et le résultat du 2°) exprimer la charge $q(r)$ située à l'intérieur d'une sphère de rayon r.

4°) En utilisant une équation locale de votre choix, exprimer la densité volumique de charges locale $\rho(r)$ à une distance r du point O dans le modèle de Yukawa. Commenter et interpréter le signe de cette densité de charges.

5°) Comment se simplifie le potentiel de Yukawa lorsque $a \gg r$? A quoi peut-on le comparer ?